ÖRNEK: X, t.d. nin M.G.F. nu

$M_x(t) = (p.e^t + q)^n$ olsun, $E(x)$ ve $V(x)$'i

bulunuz.

Çözüm:
$$E(x) = \left.\frac{\partial M_x(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = M'_x(t)$$

$$= \left. n.(p.e^t + q)^{n-1}.p.e^t \right|_{t=0}$$

$$= n.(\underbrace{p+q}_{=1})^{n-1}.p = n.p$$

$$E(x^2) = M''_x(t) = \left.\frac{\partial^2 M_x(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0}$$

$$= n.p.e^t.(p.e^t+q)^{n-1} + (n-1).(p.e^t+q)^{n-2}.p.e^t.n.pe^t$$

$$= np\,e^0.(\underbrace{p.e^0+q}_{=1})^{n-1} + n.(n-1).p.e^0.(p.e^0+q)^{n-2}.p.e^0 \quad t=0$$

$$= np + n.(n-1).p^2 = np + (np)^2 - np^2$$

$$\Rightarrow V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= M''_x(0) - [M'_x(0)]^2$$

$$= np + \cancel{(np)^2} - np^2 - \cancel{(np)^2} = np - np^2$$

$$= np.(1-p)$$

$$= npq$$

bulunur.

ÖRNEK: X, t.d. nin olasılık fonksiyonu,

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta^x}{e^{\theta}.x!}, & x=0,1,2,\dots\\ 0, & d.h.\end{cases}$$

veriliyor.

a.) $M_x(t)$'yi bulunuz.

b.) D.K. nı bulunuz.

Çözüm: $M_x(t)=E(e^{tx})=\sum_{x=0}^{\infty}\dfrac{e^{tx}.\theta^x}{e^{\theta}.x!}$,

a.)

$$=\frac{1}{e^{\theta}}\cdot\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{tx}.\theta^x}{x!}=\frac{1}{e^{\theta}}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^t\theta)^x}{x!}$$

burada $e^t.\theta=a$ diyelim.

$$=\frac{1}{e^{\theta}}\cdot\sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^x}{x!}=\frac{1}{e^{\theta}}\cdot e^{a}=e^{e^t.\theta}.e^{-\theta}$$

$$=e^{\theta.(e^t-1)}$$ elde edilir.

b.) $D.K.=\dfrac{\sqrt{V(x)}}{E(x)}$

$$E(x)=M'_x(t=0)=\theta.e^t.e^{\theta.(e^t-1)}\Big|_{t=0}$$

$$=\theta.e^0.e^{\theta.(e^0-1)}$$

$$=\theta$$

$$E(x^2)=M''_x(t=0)=\theta.e^t.e^{\theta.(e^t-1)}+\theta.e^t.e^{\theta.(e^t-1)}.\theta.e^t\Big|_{t=0}$$

$$=\theta.e^0.e^{\theta.(e^0-1)}+\theta^2.e^0.e^{\theta.(e^0-1)}.e^0$$

$$=\theta+\theta^2$$

$$\Rightarrow V(x)=M''_x(t)-[M'_x(t)]^2=\theta+\theta^2-\theta^2=\theta$$

Böylece $D.K.=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\theta}=1/\sqrt{\theta}$ olur.

Örnek: X t.d. nin MGF si

$$M_x(t) = \frac{k \cdot e^t}{(1 - e^t + k \cdot e^t)}$$ olsun.

$E(X) = 4$ olmak üzere $k = ?$

Çözüm : $E(x) = \mu = m_1 = 4$ sıfır civarındaki 1. moment,

$$E(x) = M'_x(t)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{k.e^t.(1-e^t+k.e^t) - (-e^t+k.e^t).k.e^t}{(1-e^t+k.e^t)^2}\Bigg|_{t=0}$$

$$= \frac{k.e^0.(1-e^0+k.e^0) - (-e^0+k.e^0).k.e^0}{(1-e^0+k.e^0)^2}$$

$$= \frac{k.k - (-1+k).k}{k^2} = \frac{k-k^2+k^2}{k^2}$$

$$= \frac{1}{k} = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{4}}$$ bulunur.

Örnek : X' t.d. nin yoğunluk fonk.

$$f(x) = \begin{cases} 2.(1-x) & , 0 < x < 1 \\ 0 & , d.h. \end{cases}$$

olduğuna göre,

$$E(x^r) = \frac{2}{(r+1).(r+2)}$$ old. göst.?

Çözüm : $E(x^r) = m_r$ sıfır civarındaki r. momenttir.

$$\Rightarrow E(x^r) = \int_0^1 x^r 2(1-x)\,dx = 2.\int_0^1 (x^r - x^{r+1})\,dx$$

$$= 2.\left(\frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{x^{r+2}}{r+2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 2.\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \frac{2}{(r+1).(r+2)}$$ bulunur.